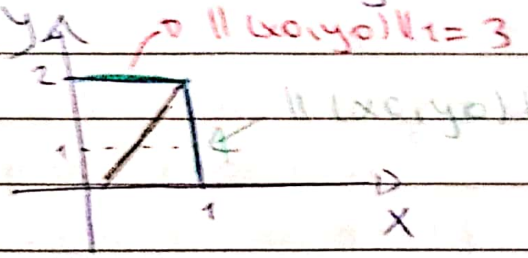
16/10/2020

• **Άσκηση:** Αποδείξτε ότι η 1-νόρμα και η ∞-νόρμα ικανοποιούν τις 3 ιδιότητες που ικανοποιεί η 2-νόρμα

Στην ουσία οι διαφορετικές νόρμες μετρούν το μήκος ενός διανύσματος με διαφορετικό τρόπο

Π.χ.: $(x_0,y_0) = (1,2) \in \mathbb{R}^2$

$\|(x_0,y_0)\| = \sqrt{5} = (\|(x_0,y_0)\|_2 = \sqrt{5})$



Γενικότερα: με το απομακρύνεται ένα σημείο από την αρχή των αξόνων, μεγαλώνει και η απόλυτή τιμή των συντεταγμένων του. Οπότε κατά συνέπεια μεγαλώνουν και οι νόρμες. Οι νόρμες κατά βάση είναι μονάδα μέτρησης του μήκους διανύσματος. Εάν μία νόρμα έχει μεγάλη τιμή αντιστοιχεί σε μεγάλο μήκος διανύσματος. Όταν μεγαλώνει κάποια νόρμα, τότε μεγαλώνουν και οι υπόλοιπες και όταν μηδενίζει κάποια νόρμα, μηδενίζουν και οι υπόλοιπες. Τότε οι νόρμες $\|\bar{x}\|_\infty$, $\|\bar{x}\|_1$, $\|\bar{x}\|_2$ είναι ανά δύο ισοδύναμες.

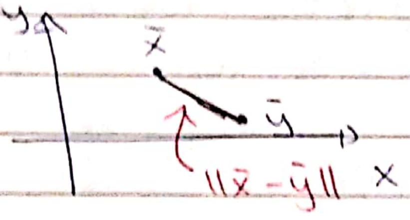
Αν $\exists\ c$ $\forall\ \bar{x} \in$ διαν. χώρου X: $\frac{1}{c}\,|||\bar{x}||| \leq \|\bar{x}\| \leq c\,|||\bar{x}|||$ (≥ 0, ≥ 0)

Για την ∞-νόρμα με $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$|x_i| \leq \|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_i|\} \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

Υπενθύμιση: Από την ευκλείδεια νόρμα ορίσαμε την ευκλείδεια απόσταση 2 σημείων (ή διανυσμάτων) x και y στον $\mathbb{R}^n$.

Σχηματικά:



Έτσι ορίζονται τα εξής σημαντικά σύνολα:

$B(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < r\}$ ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r

$\bar{B}(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq r\}$ κλειστή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r

$\partial B(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| = r\}$ σφαίρα κέντρου x και ακτίνας r

• Αυτό το σύνολο που έχω (έστω ότι είμαστε στον $\mathbb{R}^2$) που αντιστοιχεί γεωμετρικά?

Η απάντηση είναι ότι έχουμε το περίγραμμα του δηλ. ο κύκλος

• **μπάλα**: Είναι αυτό το σύνολο που περιέχει και το εσωτερικό του μέρος, ενώ η σφαίρα δεν περιέχει το εσωτερικό του μέρος και λέγεται **σύνορο**

Παρατήρηση:

Να προσεχθεί ότι για $n=1$, η ευκλείδεια νόρμα, η ∞-νόρμα και η 1-νόρμα, όλες ταυτίζονται με την απόλυτη τιμή

π.χ. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $n=1 \Rightarrow \bar{x} = (x_1)$ με $x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ταυτίζουμε το $\bar{x}$ με το $x_1 \in \mathbb{R}$ και το ονομάζουμε x

τότε: $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \underset{n=1}{=} |x_1| = |x|$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \underset{n=1}{=} \max_{i=1} |x_i| = |x_1| = |x|$

$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \underset{n=1}{=} |x_1| = |x|$

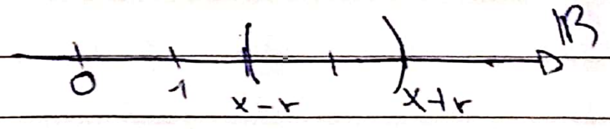
Συνεπώς, για $n=1$: $B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < r\}$

$\bar{x} = x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ $\Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ $\underset{(n=1)}{=} |x-y|$

$\Downarrow$

ανοικτό διάστημα

κέντρου x και ακτίνας r. $\{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r\} = (x-r, x+r)$



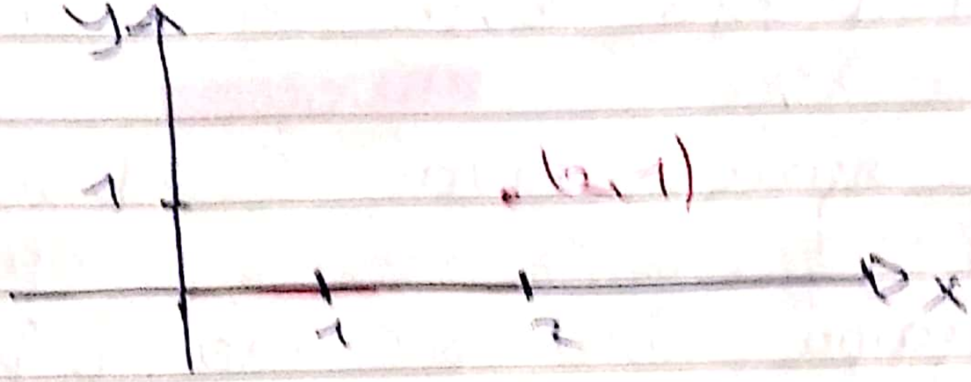
Αντίστοιχα, αν το δω έτσι θα έχω:

$\bar{B}(\bar{x}, r) = \{y \in \mathbb{R} : |\bar{x} - \bar{y}| \leq r\}$, κλειστό διάστημα κέντρου x και ακτίνας r

$\{y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq r\} = [x-r, x+r]$

και $\partial B(\bar{x}, r) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| = r\} = \{x-r, x+r\}$

Η 1-νόρμα ονομάζεται και taxicab ή Manhattan-norm, επειδή,



$\|(2,1)\|_1 = 2+1$

η απόσταση, όπως θα την διέτρεχε ένα ταξί στον χάρτη.